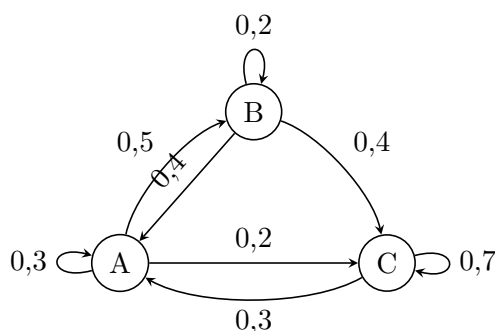


Übungsblatt 13

Aufgabe P1 *MK eines Automaten.*

Das folgende Übertragungsdiagramm beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Überganges von einem der Zustände A, B, C nach A, B, C eines Automaten vom Zeitschritt $i - 1$ zum Zeitschritt i (siehe Abbildung). Der Systemzustand zur Zeit i werde mit X_i bezeichnet.



Begründen Sie, dass es genau eine stationäre Verteilung geben muss und berechnen Sie diese.

Lösung: Die Übergangsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist die Markovkette irreduzibel, da $p_{AB}^{(1)} = 0.5 > 0$, $p_{AC}^{(1)} = 0.2 > 0$, $p_{BA}^{(1)} = 0.4 > 0$, $p_{BC}^{(1)} = 0.4 > 0$, $p_{CA}^{(1)} = 0.3$ und $p_{CB}^{(2)} > 0$. Ferner ist die Markov-Kette aperiodisch, da $p_{ii}^{(1)} > 0$ für alle $i \in \{A, B, C\}$. Da wir einen endlichen Zustandsraum haben, ist die Markov-Kette somit ergodisch und besitzt daher genau eine stationäre Verteilung. Dazu gilt es das Gleichungssystem $\alpha = \alpha P$ zu lösen. Man erhält nach Normierung als Lösung $\alpha = (\frac{8}{25}, \frac{1}{5}, \frac{12}{25})^T$.

Aufgabe P2 *Reversibilität von MK.*

Wir erinnern daran, dass eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ reversibel heißt, falls es einen Wahrscheinlichkeitsvektor¹ π gibt, sodass

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in E. \quad (\text{R})$$

- a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Markov-Kette X mit Übergangsmatrix $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, wobei $\alpha + \beta > 0$, ist reversibel.

¹Ein Vektor $\pi \in \mathbb{R}^n$ heißt Wahrscheinlichkeitsvektor, falls alle Einträge $\pi_i \geq 0$ sind und $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ gilt.

b) Für welche Werte von $p \in (0, 1)$ ist die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

reversibel?

Lösung: a) X ist reversibel. Um dies zu zeigen genügt es, einen Wahrscheinlichkeitsvektor $\pi = (\pi_1, \pi_2)^T$ zu konstruieren, der die Eigenschaft (R) erfüllt. D.h. in der konkreten Situation $\pi_1 p_{1,2} = \pi_2 p_{2,1}$, also $\pi_1 \alpha = \pi_2 \beta$. Ist $\beta = 0$, so ist wegen $\alpha + \beta > 0$ auch $\alpha > 0$ und damit muss $\pi_1 = 0$ sein und, da π ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist, $\pi_2 = 1$. Analog ergibt sich im Falle $\alpha = 0$, dass $\pi_2 = 0$ und $\pi_1 = 1$. Sind nun $\alpha, \beta > 0$, so erhalten wir $\pi_2 = \frac{\alpha}{\beta} \pi_1$ und wegen $\pi_1 + \pi_2 = 1$ folgt, dass $\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ und $\pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

b) Wir verfahren analog zu a). Wir versuchen einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsvektor zu konstruieren, der (R) erfüllt. Es muss also gelten

$$\pi_1 p_{1,2} = \pi_2 p_{2,1}, \quad \pi_1 p_{1,3} = \pi_3 p_{3,1}, \quad \pi_2 p_{2,3} = \pi_3 p_{3,2}.$$

Mit den entsprechenden Werten für p_{ij} erhalten wir

$$\pi_1 p = \pi_2 (1-p), \quad \pi_1 (1-p) = \pi_3 p, \quad \pi_2 p = \pi_3 (1-p).$$

Also erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen $\pi_2 = \frac{p}{1-p} \pi_1$, $\pi_3 = \frac{1-p}{p} \pi_1$. Einsetzen in die dritte Gleichung liefert $\frac{p^2}{1-p} \pi_1 = \frac{(1-p)^2}{p} \pi_1$. Da π_1 wegen der ersten beiden Gleichheiten von 0 verschieden sein muss (beachte: π ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor), kann letztere Gleichung nur erfüllt sein, wenn $p = 0.5$ ist. Der entsprechende Wahrscheinlichkeitsvektor ist dann (also für $p = 0.5$) $\pi = \frac{1}{3}(1, 1, 1)^T$.

Aufgabe H1 MK aus gegebenen Informationen.

Gegeben sei eine Markov-Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und es sei über das Übergangsverhalten vom Zeitpunkt n nach $n+1$ folgendes bekannt:

- Ist man im Zustand 1, so verlässt man diesen nicht mehr.
- Ist man im Zustand 2, so springt man je mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einen der Zustände 1, 3 oder 4.
- Ist man im Zustand 3, so springt man je mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Zustand 2 oder 4.
- Ist man im Zustand 4, so springt man in Zustand 5.
- Ist man im Zustand 5, so springt man in Zustand 6.
- Ist man im Zustand 6, so springt man in Zustand 4.

a) Bestimmen Sie die zu X zugehörige Übergangsmatrix.

b) Bestimmen Sie alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.

Lösung: a) Die Übergangsmatrix lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Für eine stationäre Verteilung $\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6)$ der Markov-Kette muss gelten $\alpha P = \alpha$ und $\sum_{j=1}^6 \alpha_j = 1$. Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 &= \alpha_1 \\ \frac{1}{2}\alpha_3 &= \alpha_2 \\ \frac{1}{3}\alpha_2 &= \alpha_3 \\ \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_6 &= \alpha_4 \\ \alpha_4 &= \alpha_5 \\ \alpha_5 &= \alpha_6. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $\alpha' = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ und $\alpha'' = (0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$ Lösungen des Gleichungssystems sind. Insbesondere sind dann alle Konvexkombinationen von α' und α'' ebenfalls Lösungen, d.h. alle $\alpha = \lambda\alpha' + (1 - \lambda)\alpha''$, $\lambda \in [0, 1]$, sind stationäre Verteilungen der Markov-Kette.

Aufgabe H2 Stationäre Verteilung aus Reversibilität.

Eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ heißt *reversibel*, falls es einen Wahrscheinlichkeitsvektor² π gibt, sodass

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in E. \quad (\text{R})$$

- a) Zeigen Sie, dass aus (R) folgt, dass π eine stationäre Verteilung zu P ist.
- b) Eine Urne enthalte insgesamt $N \in \mathbb{N}$ Kugeln, die entweder rot oder blau sein können. Es bezeichne X_n die Anzahl der blauen Kugeln in der Urne zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$. Im Zeitintervall $(n, n+1)$ wird eine Kugel zufällig und gleichverteilt der Urne entnommen und gegen eine Kugel der anderen Farbe ausgetauscht. Bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix P und finden Sie eine stationäre Verteilung zu P .

Lösung: a) Es sei P die Übergangsmatrix einer reversiblen Markovkette und π ein Wahrscheinlichkeitsvektor, sodass (R) gilt. Wir müssen zeigen, dass $\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}$ gilt für alle $j \in E$. Sei $j \in E$ beliebig, dann gilt, da P eine stochastische Matrix ist (Zeilensummen sind 1),

$$\sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} \stackrel{(\text{R})}{=} \sum_{i \in E} \pi_j p_{ji} = \pi_j \underbrace{\sum_{i \in E} p_{ji}}_{=1} = \pi_j. \quad (\text{1 P.})$$

²Ein Vektor $\pi \in \mathbb{R}^n$ heißt Wahrscheinlichkeitsvektor, falls alle Einträge $\pi_i \geq 0$ sind und $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ gilt.

b) Man stellt leicht fest, dass $E = \{0, \dots, N\}$ und $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ mit

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{N}, & \text{falls } i - j = 1, \\ \frac{N-i}{N}, & \text{falls } i - j = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2 \text{ P.})$$

Zur Bestimmung einer stationären Verteilung machen wir uns a) zu Nutze. Wir zeigen dazu, dass die Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ reversibel ist, indem wir einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsvektor π konstruieren, der (R) erfüllt. Da $p_{ij} = 0$ für $|i-j| \neq 1$, $i, j \in E$, brauchen wir nur $\pi_i p_{ij}$ für $j \in \{i \pm 1\}$ zu betrachten. Für $i \in \{0, \dots, N-1\}$ soll gelten $\pi_i p_{i,i+1} = \pi_{i+1} p_{i+1,i}$, was mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten äquivalent zu $\pi_i \frac{N-i}{N} = \pi_{i+1} \frac{i+1}{N}$ ist, also $\pi_{i+1} = \frac{N-i}{i+1} \pi_i$. (1 P.) Lösen der Rekursion liefert $\pi_{i+1} = \pi_0 \prod_{j=0}^i \frac{N-j}{j+1} = \frac{N-i}{i+1} \cdot \frac{N-i+1}{i} \dots N \pi_0 = \frac{N!}{(i+1)!(N-(i+1))!} \pi_0 = \binom{N}{i+1} \pi_0$. (1 P.) Da wir einen Wahrscheinlichkeitsvektor haben wollen, muss $\sum_{i=0}^N \pi_i = 1$ sein, was wegen $\sum_{i=0}^N \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} = \pi_0 2^N$ (Binomischer Lehrsatz!) äquivalent zu $\pi_0 = 2^{-N}$ ist (0,5 P.). Also liefert nach a) der Vektor π mit $\pi_i = 2^{-N} \binom{N}{i}$ eine stationäre Verteilung für P (0,5 P.).

Aufgabe H3 MK zu gegebener Verteilung.

Wir behaupten, dass man zu einer vorgegebenen Verteilung $\alpha = (\alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix $P = (P_{i,j})_{i,j=1, \dots, n}$ konstruieren kann, sodass α eine stationäre Verteilung dieser Markov-Kette ist. Hierzu benötigt man die Übergangsmatrix $Q = (Q_{i,j})_{i,j=1, \dots, n}$ einer beliebigen irreduziblen Markov-Kette. Dann kann man die Einträge von P gemäß

$$P_{i,j} = \begin{cases} Q_{i,j} \cdot \min \left[\frac{\alpha_j Q_{j,i}}{\alpha_i Q_{i,j}}, 1 \right] & \text{falls } j \neq i \text{ und } Q_{i,j} \neq 0, \\ 0 & \text{falls } j \neq i \text{ und } Q_{i,j} = 0, \\ 1 - \sum_{k \neq i} P_{i,k} & \text{falls } j = i, \end{cases}$$

konstruieren. Beweisen Sie diese Behauptung.

Lösung: Sei l zwischen 1 und n beliebig. Dann zeigen wir $\alpha_l = (\alpha \cdot P)_l$:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot P)_l &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot P_{i,l} = \alpha_l \cdot P_{l,l} + \sum_{i:i \neq l} \alpha_i \cdot P_{i,l} \\ &= \alpha_l \cdot \left(1 - \sum_{k:k \neq l} Q_{l,k} \min \left[\frac{\alpha_k Q_{k,l}}{\alpha_l Q_{l,k}}, 1 \right] \right) + \sum_{i:i \neq l} \alpha_i Q_{i,l} \min \left[\frac{\alpha_l Q_{l,i}}{\alpha_i Q_{i,l}}, 1 \right] \\ &= \alpha_l - \sum_{k:k \neq l} \min \left[\alpha_k Q_{k,l}, \alpha_l Q_{l,k} \right] + \sum_{i:i \neq l} \min \left[\alpha_l Q_{l,i}, \alpha_i Q_{i,l} \right] \\ &= \alpha_l. \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung.

Erkennt ein Student, dass die Matrix P reversibel ist also, dass für alle i und j

$$\alpha_i P_{i,j} = \alpha_j P_{j,i}$$

gilt, so vereinfacht sich der Beweis zu

$$(\alpha P)_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_{i,j} = \alpha_j \sum_{i=1}^n P_{j,i} = \alpha_j \cdot 1.$$

Keine Abgabe der Hausübungen.

Viel Erfolg! :)